

貨幣時間價值

Guidance

- ① 單筆金額的終值與現值
- ② 年金的現值與終值
- ③ 有效年利率的使用
- ④ 【特別整理】
現金流圖解和計算機解法

查表，就是要學會查表！因為投資型保險的考試只能用一般的計算機，所以遇到這邊的題目，一定要會查利率因子表。考試時也會發給考生這四張表，務必學會。剩下的就是分辨，到底要求現值還是終值、單筆還是年金。這也是下一章債券計算的基礎，GO！

1 單筆金額的終值與現值

◆ 什麼是貨幣時間價值

每一塊錢的貨幣在不同的時間點，其價值不同，以今天的一塊錢而言，因為還要加上利息，所以要比未來的一塊錢較具有價值。

◆ 單利、複利、本利和

1. **單利**：以原始本金乘上約定的利率即成為每期的利息，所以每期的利息皆是相同的。

2. **複利**：指從第一期所產生的利息，在到期時會轉入本金，也就是以期末的本利和作為下一期期初的本金。

3. **本利和**：

→ 存入一筆本金按複利計算，數期之後的本金利息和（本利和）稱為複利終值。

$$\rightarrow \text{複利終值} = \text{本金} \times (1+r)^n$$

複利終值就是以複利計算的本利和，通常用在整筆投資財富累積成果的計算上面。



◆ 終值與現值

1. **終值 (Future Value, FV)** : 指貨幣或現金流量在未來特定時點的價值。

公式： $FV = PV \times (1+r)^n = PV \times FVIF(r,n)$

$FVIF(r,n) = (1+r)^n$: 複利終值利率因子 → 查表可得

FV：本利和（即終值） PV：本金（即現值）

r：利率 n：期數

考試時多是運用查表法 → 終值利率因子表，如下：

講義

已知現值要計算終值時，應使用複利終值係數；若已知終值而要計算現值時，則應使用複利現值係數。



終值利率因子表											
$FVIF(r,n) = (1+r)^n$											
期數	r	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
1	1	1.0100	1.0200	1.0300	1.0400	1.0500	1.0600	1.0700	1.0800	1.0900	1.1000
2	1	1.0201	1.0404	1.0609	1.0816	1.1025	1.1236	1.1449	1.1664	1.1881	1.2100
3	1	1.0303	1.0612	1.0927	1.1249	1.1576	1.1910	1.2250	1.2597	1.2950	1.3310
4	1	1.0406	1.0824	1.1255	1.1699	1.2155	1.2625	1.3108	1.3605	1.4116	1.4641
5	1	1.0510	1.1041	1.1593	1.2167	1.2763	1.3382	1.4026	1.4693	1.5386	1.6105
6	1	1.0615	1.1262	1.1941	1.2653	1.3401	1.4185	1.5007	1.5869	1.6771	1.7716
7	1	1.0721	1.1487	1.2299	1.3159	1.4071	1.5036	1.6058	1.7138	1.8280	1.9487
8	1	1.0829	1.1717	1.2668	1.3686	1.4775	1.5938	1.7182	1.8509	1.9926	2.1436
9	1	1.0937	1.1951	1.3048	1.4233	1.5513	1.6895	1.8385	1.9990	2.1719	2.3579
10	1	1.1046	1.2190	1.3439	1.4802	1.6289	1.7908	1.9672	2.1589	2.3674	2.5937

知道（期數）和（利率r），就可以找出對應的複利終值利率因子。

例如：期數=4，r=5% → 終值利率因子=1.2155。

2. **現值 (Present Value, PV)** : 指未來貨幣在今天的價值。

公式： $PV = FV \times \frac{1}{(1+r)^n} = FV \times PVIF(r,n)$

$PVIF(r,n) = \frac{1}{(1+r)^n}$: 複利現值利率因子 → 查表可得。

考試時多是運用查表法 → 現值利率因子表，如下：

考試時不能帶工程或財務用計算機，但是會給利率因子表。所以一定要學會查表！



現值利率因子表

$$PVIF_{(r,n)} = \frac{1}{(1+r)^n}$$

期數	r	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
1		0.9901	0.9804	0.9709	0.9615	0.9524	0.9434	0.9346	0.9259	0.9174	0.9091
2		0.9803	0.9612	0.9426	0.9246	0.9070	0.8900	0.8734	0.8573	0.8417	0.8264
3		0.9706	0.9423	0.9151	0.8890	0.8638	0.8396	0.8163	0.7938	0.7722	0.7513
4		0.9610	0.9238	0.8885	0.8548	0.8227	0.7921	0.7629	0.7350	0.7084	0.6830
5		0.9515	0.9057	0.8626	0.8219	0.7835	0.7473	0.7130	0.6806	0.6499	0.6209
6		0.9420	0.8880	0.8375	0.7903	0.7462	0.7050	0.6663	0.6302	0.5963	0.5645
7		0.9327	0.8706	0.8131	0.7599	0.7107	0.6651	0.6227	0.5835	0.5470	0.5132
8		0.9235	0.8535	0.7894	0.7307	0.6768	0.6274	0.5820	0.5403	0.5019	0.4665
9		0.9143	0.8368	0.7664	0.7026	0.6446	0.5919	0.5439	0.5002	0.4604	0.4241
10		0.9053	0.8203	0.7441	0.6756	0.6139	0.5584	0.5083	0.4632	0.4224	0.3855

注意：連續複利的計算涉及指數e，若不是用工程或財務用計算機是算不出來的。所以在考試時這類題目也不太會出。觀念知道就夠了！



知道（期數）和（利率r），就可以找出對應的複利現值利率因子。

例如：期數=4，r=5% → 現值利率因子=0.8227。
你找對了嗎？

3. 連續複利公式：

$$FV = PV \times e^{r \times n}$$

$$PV = FV \times e^{-r \times n}$$

e：指數；r：年利率；n：年數

案例一

陳先生在銀行存入10,000元，年利率為3%每年計息一次，則4年後的本利和為多少？

解答

- 本利和就是求終值，所以要查終值利率因子表
- $FV = PV \times (1+r)^n = PV \times FVIF(3\%, 4)$
- 期數=4，r=3%，查表得因子=1.1255

→本利和 = $10,000 \times 1.1255 = 11,255$ (元)

終值利率因子表				
期數	r	1%	2%	3%
1		1.0100	1.0200	1.0300
2		1.0201	1.0404	1.0609
3		1.0303	1.0612	1.0927
4		1.0406	1.0824	1.1255

案例二

陳先生在銀行存入10,000元，年利率為12%，每月計息一次，則2年後的本利和為多少？

解答

- 每月計息一次，故月利率 = $12\% \div 12 = 1\%$
- 2年共24個月，故期數 = 24
- $FV = PV \times (1+r)^n = PV \times FVIF(1\%, 24)$
- 查終值利率因子表，得到1.2697
- 本利和 = $10,000 \times 1.2697 = 12,697$ (元)

複利率法 (compound interest)，是一種計算利息的方法。按照這種方法，利息除了會根據本金計算外，新得到的利息同樣可以生息，因此俗稱「利滾利」、「驢打滾」或「利疊利」。



終值利率因子表				
期數	r	1%	2%	3%
23		1.2572	1.5769	1.9736
24		1.2697	1.6084	2.0328
25		1.2824	1.6406	2.0938

案例三

李先生希望4年後有100,000元的存款，若以5%的年利率每年計息一次而言，現在須要存入多少錢才能達成呢？

解答

- 已知終值 = 100,000，求現值

→期數 = 4, $r = 5\%$, 查現值利率因子表, 得 0.8227
 →現值 = 終值 × 現值利率因子 = $100,000 \times 0.8227$
 $= 82,270$ (元)

現值利率因子表				
期數	r	4%	5%	6%
3		0.8890	0.8638	0.8396
4		0.8548	0.8227	0.7921
5		0.8219	0.7835	0.7473

複利是現代理財一個重要概念，由此產生的財富增長，稱作「複利效應」，對財富可以帶來深遠的影響。只要計算利息的周期越密，財富增長越快，而隨著年期越長，複利效應亦會越為明顯。



案例四

李先生希望2年後有100,000元的存款，若以12%的年利率每月計息一次而言，現在須要存入多少錢才能達成呢？

解答

→已知終值 = 100,000, 求現值
 →期數 = $2 \times 12 = 24$, $r = 12\% / 12 = 1\%$, 查現值利率因子表，得 0.7876
 →現值 = 終值 × 現值利率因子 = $100,000 \times 0.7876$
 $= 78,760$ (元)

現值利率因子表				
期數	r	1%	2%	3%
23		0.7954	0.6342	0.5067
24		0.7876	0.6217	0.4919
25		0.7798	0.6095	0.4776

◆ 複利因子

- 不同的複利次數，直接影響終值的大小，複利次數愈多，複利之效果愈大。
- 一年複利一次：複利因子為 $(1+r)^n$ 。

3. 一年複利 m 次：複利因子為 $(1 + \frac{r}{m})^{m \times n}$ 。

案例一

年利率 = 12%，每季複利一次，十年後欲累積本利和 \$100,000，請問現在應存入多少？

解答

- 季利率 = $12\% \div 4 = 3\%$
- 每季複利 1 次，1 年 4 期，10 年共 40 期
- 期數 = 40， $r = 3\%$ 的終值因子，查表得 3.2620
- 終值 = $100,000 = \text{本金} \times (r = 3\%，\text{期數} = 40 \text{ 的複利終值因子} = 3.2620)$
- 本金 = $100,000 / 3.2620 = \$30,656$

終值利率因子表				
期數	r	1%	2%	3%
30		1.3478	1.8114	2.4273
40		1.4889	2.2080	3.2620
50		1.6446	2.6916	4.3839
60		1.8167	3.2810	5.8916

◎補充

金融學上有所謂「72 法則」，用作估計將投資倍增或減半所需的時間，反映出的是複利的結果。

例如：假設最初投資金額為 100 元，複息年利率 9%，利用「72 法則」，將 72 除以 9（增長率），得 8，即需約 8 年時間，投資金額滾存至 200 元（兩倍於 100 元），而準確需時為 8.0432 年。

2 年金的現值與終值

◆ 年金 (Annuity)

指在一定時間內，固定定期支出或收入的等額現金流量觀念 (Payment, PMT)，例如：零存整付、房屋貸款、以及年金給付等。

1. 普通年金：年金支出或收入的時間是在期末者，或稱之為期末年金，例如：每月償還的房屋貸款。
2. 期初年金：發生的時間是在期初者，例如：繳交壽險保險費。

講義

有兩大要件是運用年金時必須注意的：

1. 每期的收入或支付金額固定不變。
2. 在計算期間內，每期現金流量持續不能中斷。





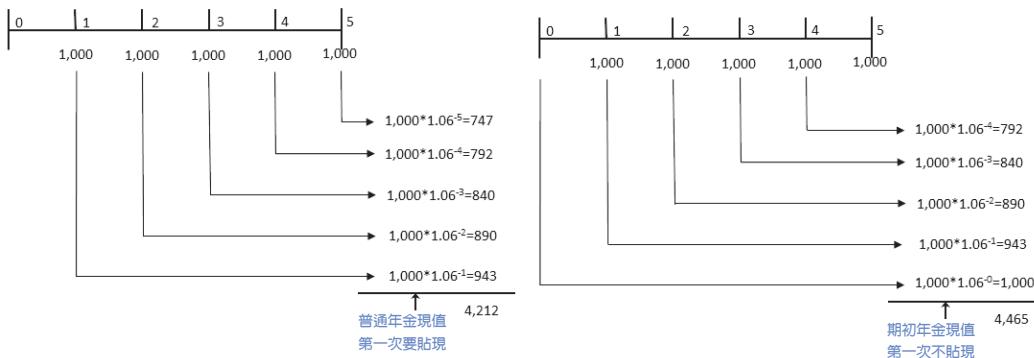
理解

年金現值

將未來一段時間的每年或每月收取或給付的現金流量，折現為目前的一筆錢。

◆ 年金現值

- 普通年金現值：指每期期末金錢支付的現在價值。
- 期初年金現值：指每期期初金錢支付的現在價值。
- 期初年金又稱為到期年金，期初年金現值比普通年金現值少折現一次。
- 普通年金是在期末給付→故第1期「要貼現」；
期初年金是在期初給付→故第1期「不用貼現」。
→普通年金的現值小於期初年金的現值。
- 期初年金的現值 = 普通年金的現值乘上 $(1+r)$ 倍，列表如下：



◆ 若其他條件固定，則：

- 年金的終值與利率水準呈「同方向變動」：

$$\begin{cases} \text{利率水準 } \uparrow \rightarrow \text{終值 } \uparrow \\ \text{利率水準 } \downarrow \rightarrow \text{終值 } \downarrow \end{cases}$$

- 年金的現值與利率水準呈「反方向變動」：

$$\begin{cases} \text{利率水準 } \uparrow \rightarrow \text{現值 } \downarrow \\ \text{利率水準 } \downarrow \rightarrow \text{現值 } \uparrow \end{cases}$$

解答

→期數 = 6， $r = 5\%$ ，求年金現值，故查年金現值利率因子表，得 5.0757
→年金 $PMT = 1,500$
$$\begin{aligned} \rightarrow PVOA_6 &= PMT \times PVIFA(5\%, 6) = 1,500 \times 5.0757 \\ &= 7,613 \end{aligned}$$

◆ 期初年金現值公式

$$PVAD_n = PVOA_n \times (1 + r)$$

期初年金現值 = 普通年金現值 $\times (1 + r)$

案例二

假如在年初存入 1,500 元，一連存了 6 年，假設年利率為 5%，每年計息一次，則今年年初的現值為多少？

解答

→期初年金現值 = 普通年金現值 $\times (1 + r)$
$$\begin{aligned} \rightarrow PVOA_6 &= PVOA_6 \times (1 + 5\%) = 7,613 \times 1.05 = 7,993 \end{aligned}$$

◆ 普通年金終值公式

$$FVOA_n = PMT \times [(1 + r)^{n-1} + (1 + r)^{n-2} + \dots + 1] = PMT \times FVIFA(r, n)$$

$FVIFA(r, n)$ ：年金終值利率因子

考試計算時，也是用查表法 → 年金終值利率因子表，如下：

案例四

假如在年初存入1,300元，一連存了6年，假設年利率為5%，每年計息一次，則在第6年年底時本利和為多少？

解答

$$\begin{aligned}\rightarrow \text{期初年金終值} &= \text{普通年金終值} \times (1+r) \\ \rightarrow FVOA_4 &= 1,300 \times FVIFA(5\%, 6) \times (1+5\%) \\ &= 10,202 \times 1.05 = 10,712\end{aligned}$$

3 有效年利率的使用

◆ 名目利率與有效年利率

1. 名目利率：借貸契約中設定的利率，或稱票面利率。
2. 有效年利率（Effective Interest Rate）：不管複利期間，在一年中實際賺得的利率。

有效年利率的計算公式：
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{令本金} = 1 \text{ 元，則} \\ EIR = \text{本利和} - \text{本金} = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1, \\ \text{若為連續複利，則 } EIR = e^r - 1 \end{array} \right.$$

其中 $\left\{ \begin{array}{l} r : \text{名目年利率} \\ m : \text{表每年複利的次數} \\ e = 2.71828..... \end{array} \right.$

3. 轉換成有效年利率之後，不管每年計息、每季計息或每月計息，都可以比較。

案例一

A銀行以每季計息之年利率5.9%，求有效年利率=？

解答

$$\begin{aligned} \text{A銀行之有效年利率} &= \left[\left(1 + \frac{5.9\%}{4}\right)^4 - 1 \right] = [1.01475]^4 - 1 \\ &= 0.0603 = 6.03\% \end{aligned}$$

案例二

B銀行以每月計息之年利率為5.7%，求有效年利率=？

解答

$$\begin{aligned} \text{B銀行之有效年利率} &= \left[\left(1 + \frac{5.7\%}{12}\right)^{12} - 1 \right] = [1.00475]^{12} - 1 \\ &= 0.0585 = 5.85\% \end{aligned}$$

案例三

C銀行採連續複利計息之年利率為5.5%，求有效年利率=？

解答

$$\begin{aligned} \text{C銀行之有效年利率} &= e^{5.5\%} - 1 = e^{0.055} - 1 = 0.0565 \\ &= 5.65\% \end{aligned}$$

4 【特別整理】現金流圖解和計算機解法

清楚了解現金流是財務計算中非常重要的，所以我們特別繪製整理和讀者分享。

還有，在投資型保險的考試中，僅能使用一般計算機，不能使用財務或工程用計算機。若要無法查表時，怎麼辦？其實使用一般計算機還是可以按出年金現值、終值。編者建議盡量使用查表法。但是如果真要用一般計算機也是可以的。整理如下：

◆ 終值 (FV, Future Value)

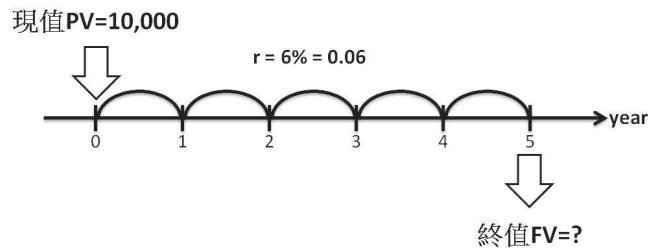
這是編者在2008年修訂時寫的計算機算法。完全就是為了不查表，而且要用一般計算機算出來的方式。其實比起查表法，這真的比較浪費時間。而且除了考試之外，我們大可使用工程或是財務用計算機，根本不用這麼麻煩！但是凡走過必留下痕跡，就當作是紀念自己年幼無知亂想亂寫吧～



案例一

假如乃哥在第一年年初投入10,000元，年利率=6%，試求第5年年底的本利和（終值）=?

試著畫出下圖：(0代表第一年年初；1代表第一年年底和第2年年初，這兩個是同一個時間點)



解答

$$\rightarrow \text{公式} : FV = PV \times (1+r)^n \Rightarrow FV = 10,000 \times (1+0.06)^5$$

\rightarrow 計算機：先算出 $(1.06)^5$ \rightarrow 按1.06，連按2個乘號 $\times \times$ (表示連乘)，再按4下 $=$ ，得1.3382，就是 $(1.06)^5$ ，再按 \times 10,000，得13,382元-----ANS

利用此法，完全不需複利終值表也可以簡單算出答案。

※小技巧：若題目的期數n太多，例如： $(1.06)^{30}$ ，可以先按1.06 $\times \times$ $=$ 按9下，可得 $(1.06)^{10} = 1.7908$ ，再按 $\times \times$ ，再按 $=$ 2下，就等於求 $[(1.06)^{10}]^{30} = (1.06)^{30}$ ，不然你就去按 $=$ 29下，也可以求得 $(1.06)^{30} = 5.7435$ 。

※明白了嗎？求 X^n ，就是計算機先按出X，然後連接2下 \times ，讓計算機處於連乘狀態，此時已經是1次方，再按一下 $=$ 就可得2次方，再按一下 $=$ 就得3次方，以此類推。所以 $=$ 要按所求次方的 $(n-1)$ 下。

- 在進入年金終值&現值之前，讓我們回憶一下國中數學的等比級數：

$$S_n = \frac{a_0(r^n - 1)}{r - 1}, \text{ 當 } r > 1 \text{ (財務計算中, } r \text{ 通常皆} > 1\text{)}$$

a_0 ：首項、 r ：公比、 n ：項數

這個觀念和算法在年金公式中，會不斷出現，記起來吧！多數計算題將不再是困擾，反而就變成送分題喔！



案例三

$$S_n = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 62$$

解答

$a_0 = 2$ 、公比 $r = 2$ 、項數 $n = 5$

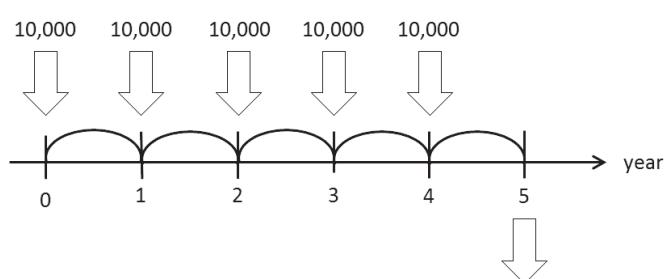
$$S_n = \frac{2(2^5 - 1)}{2 - 1} = 62 \rightarrow \text{其中 } 2^5 \text{ 按 } 2 \times 2 \times 2 \text{ 按 } 4 \text{ 下可得。}$$

◆ 年金終值

案例四

小布在每年年初存10,000元，存了5年，年利率6%，每年計息一次，則第5年年底的本利和為多少？

畫圖，年金的題目一定要畫圖想一想，比較不會錯喔！



$$r = 6\% = 0.06$$

年金終值=?